Chapitre 3

Rapport sur les épreuves écrites

3.1 Première épreuve écrite

3.1.1 Enoncé

On trouvera l'énoncé de l'épreuve à l'adresse suivante : http://agrint.agreg.org/

3.1.2 Remarques générales

Le but de ce problème est d'établir l'égalité $\tau_8 = 240$, où τ_8 est le nombre maximal de boules de rayon 1 deux-à-deux tangentes ou disjointes, et tangentes à la boule unité de centre O dans $\mathbf{R}^8$. La première partie établit l'inégalité $\tau_8 \geqslant 240$ de façon élémentaire.
Les parties II et III introduisent les outils (action du groupe orthogonal sur certains espaces de fonctions harmoniques) qui sont utilisés dans la partie IV pour établir l'inégalité $\tau_8 \leqslant 240$. L'un des points essentiels de la preuve est que, si n est un entier, et si $P = P_k^{\frac{n-3}{2},\frac{n-3}{2}}$ est un polynôme de Jacobi, il existe des fonctions polynomiales u_i sur $\mathbf{R}^n$ tels que $P(< c, c' >) = \sum_i u_i(c)u_i(c')$, pour c, c' de norme 1 dans $\mathbf{R}^n$.

3.1.3 Commentaires question par question

- Q1-3. Dans les trois premières questions, il s'agit d'établir des conditions nécessaires et suffisantes pour que des boules euclidiennes soient dans telle ou telle position relative. Elles permettent de mettre en valeur la clarté d'esprit, l'aptitude à organiser la rédaction de résultats multiples (équivalence, complément lors d'une implication) et la capacité de raisonnement.
  L'ingrédient mathématique majeur de ces questions est l'inégalité triangulaire et sa condition d'égalité (pour la norme euclidienne standard de $\mathbf{R}^n$). Si l'inégalité est bien utilisée la condition d'égalité semble ignorée de trop nombreux candidats.
- Q4. Les justifications de $\tau_2 \leqslant 6$ sont souvent hasardeuses voire absentes. On lit souvent des affirmations non prouvées. Notons à ce propos que, si un dessin est souvent le bienvenu et peut aider à la compréhension, il ne peut tenir lieu de démonstration.
- Q5 est plutôt bien traitée dans l'ensemble.
- Q7. Le caractère C^∞ d'une application linéaire en dimension finie est rarement énoncé.
  La formule donnant la dérivée partielle d'une fonction composée est très rarement connue. Le fait que σ soit une application linéaire orthogonale n'est quasiment jamais envisagé. Cette question agit souvent comme couperet dans cette partie.
- Q9. La formule de changement de variables dans une intégrale multiple est mal connue.

- Q10a. Il s'agit de voir que le groupe G agit transitivement sur les sphères ; ceci a rarement été justifié de façon convaincante.
- Q11a. Trop de candidats, tout en ayant peut-être une idée correcte de la démonstration, en ont donné une rédaction erronée, par exemple : "Ecrivons $P = a_k X^k + \cdots + a_0$, alors P a au plus k racines ; contradiction." On ne peut pas avoir de contradiction s'il n'y a pas d'hypothèse absurde !
- Q11b. Quelques candidats pensent à considérer un polynôme à n variables comme un polynôme en une variable en fixant $n-1$ variables. La question est délicate à rédiger correctement. Elle a découragé beaucoup de candidats.
- Q12. S'il est clair que la matrice d'un élément de K, dans la base canonique, a une dernière colonne égale à e_n, le fait que la dernière ligne est égale à la transposée du vecteur colonne e_n a été souvent oublié.
- Q13. Si l'inclusion $Im\ \varphi \subset \ldots$ a été souvent bien traitée, cela n'a pas été le cas de l'inclusion réciproque.
- Q14b. Cette question a été très peu abordée.
- Q14c. Trop de candidats ne pensent pas à vérifier que $a_k \neq 0$ pour dire qu'un polynôme $a_k X^k + \cdots + a_0$ est de degré k.
- Q15. On trouve parfois des fragments de réponses, par exemple pour 15-a) et 15-f), qui sont des applications directes du cours.
- La partie IV a été très peu abordée, à l'exception de la question 16 et de la question 20, où il s'agissait de prendre du recul en utilisant plusieurs des questions précédentes.
- La partie V, largement indépendante des précédentes, a permis a certains candidats de montrer des connaissances sur les matrices symétriques (notamment les questions 21 et 22c).

3.2 Seconde épreuve écrite

3.2.1 Enoncé

On trouvera l'énoncé de l'épreuve à l'adresse suivante : http://agrint.agreg.org/

3.2.2 Remarques générales

Le premier objectif du problème est annoncé dans le préambule. Lorsqu'on a un coefficient dominant au sens de la relation (2), pour tout second membre dans $\ell^p(\mathbf{Z}, \mathbf{R})$, l'équation (1) a une unique solution dans $\ell^p(\mathbf{Z}, \mathbf{R})$ (ceci est démontré dans la question 21). On ne traite dans le problème que les cas de $p = 1$ ou $p = \infty$, mais c'est vrai pour tout p.
Le résultat s'étend en non linéaire dans les espaces de Hilbert, en utilisant la méthode de Newton pour obtenir le résultat de surjectivité, et des techniques types d'EDP linéaires elliptiques. Mais comme le théorème de Lax Milgram nous aurait emmené très loin, la partie **V** s'est limitée au cas périodique, qui se passe donc en dimension finie, au prix d'une certaine lourdeur des notations. La partie **V** permettait difficilement le grappillage et n'a d'ailleurs été que très peu abordée.

Le jury a apprécié le bon niveau d'un certain nombre de copies, montrant la qualité du travail de préparation des candidats dans des conditions difficiles. Nous continuons à observer le phénomène récent d'apparition d'un nombre non négligeable de copies quasi-vides. En revanche, la sélectivité du concours fait que les candidats qui passent la barre de l'admissibilité ont un niveau certain.

Passons à des conseils et remarques, complétant ou répétant ceux des rapports précédents, qu'il est utile de lire également.