

- 22. La question 22 n'a jamais été réussie, il fallait établir que $2^{2^{m-1}} \equiv 1 \pmod{2^m - 1}$.
- 23. Question rarement abordée
- 24. Question élémentaire souvent abordée.

PARTIE 5

Cette partie a été très peu traitée même partiellement.

4.2 Seconde épreuve écrite

4.2.1 Énoncé

On trouvera l'énoncé de l'épreuve à l'adresse suivante : <http://agrint.agreg.org/Sujets/15-EP2.pdf>

4.2.2 Thème

Le sujet proposait d'étudier différentes propriétés de la fonction Γ , puis d'appliquer ces résultats à une famille de variables aléatoires réelles positives ayant pour densités les fonctions $f_t(x) = \frac{x^{t-1}e^{-x}}{\Gamma(t)}$, $x > 0$.

4.2.3 Remarques générales :

Même si la fonction Γ figure explicitement au programme, dès l'instant où une question demande de **démontrer** un résultat, fût-il un résultat de cours, le jury attend une preuve précise des affirmations des candidats.

La chasse aux points (le grapillage!) ne permet pas de faire valoir ses compétences de réflexion sur la mise en place d'un raisonnement mathématique, ni de mettre en évidence le recul sur ses propres connaissances. Les barèmes ne favorisent pas un tel comportement, qui est à proscrire. Les candidats sérieux ont pu progresser en répondant de façon articulée et justifiée aux questions qui s'enchaînaient dans une difficulté croissante.

Le jury insiste sur l'importance attachée à la qualité de la rédaction. Les candidats sont invités à prendre le temps d'une relecture de leurs écrits, qui leur permettrait certainement de repérer de grossières erreurs. De même, il est nécessaire d'apporter des justifications correctes et complètes : après avoir rappelé le théorème que l'on souhaite appliquer, il faut prendre soin de bien vérifier que toutes ses hypothèses sont satisfaites dans la situation étudiée. Cette dernière étape a été trop souvent oubliée, ou que partiellement menée à bien.

On regrette des difficultés avec les quantificateurs, qui peuvent être parfois mal utilisés.

4.2.4 Commentaires détaillés par partie :

Partie I.

1. Il s'agissait d'établir l'existence de la constante γ d'Euler. L'étude de la suite proposée est classique, via une comparaison série/intégrale pour une intégrande décroissante et positive, qu'il convient de faire précisément. Le jury regrette que trop de candidats écrivent des inégalités fantaisistes.

2. Cette question découpée en 7 sous-questions, amenait les candidats à utiliser des outils variés, et ainsi permettait de tester leurs connaissances sur plusieurs points importants du programme. Ceci conduit aux remarques suivantes :

Trop peu nombreux sont les candidats qui mènent correctement l'étude d'une intégrale généralisée : intégrabilité locale via une étude de continuité, puis étude en chaque borne où il n'y a pas continuité. Pratiquement aucun candidat ne rappelle que la positivité des intégrandes joue un rôle dans l'application des théorèmes de comparaison.

L'intégration par partie est très souvent menée à bien correctement, et le fait que Γ est un prolongement à \mathbb{C} de la factorielle a bien été établi par la plupart des candidats.

Les changements de variables doivent être justifiés en accord avec les résultats figurant au programme, et c'est trop rarement le cas.

Le calcul de l'intégrale de Gauss, et la preuve de l'inégalité classique : $(1 - \frac{x}{n})^n \leq e^{-x}$ ont souvent donné satisfaction.

En revanche, les interversions de limites et d'intégrales mettent beaucoup de candidats en difficulté, et donnent lieu à des rédactions très insuffisantes. Ainsi, trop de candidats ne vérifient pas les hypothèses du théorème de convergence dominée, y compris celle, pourtant primordiale, de domination par une fonction intégrable et indépendante du paramètre.

De façon générale, le chapitre sur les intégrales à paramètres n'est pas suffisamment assimilé : trop nombreux sont les candidats qui semblent penser qu'aucune justification n'est nécessaire pour intervertir des limites ou des dérivations avec des intégrales. Il en va de même pour le théorème de dérivation terme à terme des séries.

Les équivalents sont trop souvent mal maîtrisés. Rappelons qu'il n'est pas possible, en général, de prendre l'exponentielle ou le logarithme d'équivalents. Il faut donc, si on souhaite néanmoins le faire, donner des arguments appropriés, dans la situation étudiée.

Ainsi, cette question a été fort discriminante, et les candidats ayant justifié correctement les points évoqués ci-dessus ont marqué la différence.

Partie II.

3. Cette question technique n'a été bien traitée que par une minorité de candidats. Les techniques de base d'analyse (majorations, minorations, ...) sont mal dominées par trop de candidats. Toutes les hypothèses sont nécessaires, et on s'étonne de voir certains candidats conclure en négligeant une ou plusieurs d'entre elles...

4. Cette question, assez facile, n'a pas posé de difficultés aux candidats qui font les choses proprement. En revanche, on a vu apparaître, dans certaines copies, au fil du calcul, des expressions du genre $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{s+k+1}$, manifestement divergentes sans que cela ne paraisse gêner leur raisonnement.

Rappelons que si on veut scinder une série convergente en différence de deux séries divergentes, il convient de le faire sur les sommes partielles...

5. Peu de candidats ont conclu avec bonheur cette question.

6. Cette question a été beaucoup abordée, et souvent avec succès. Parmi les erreurs observées, on note encore la composition ou la sommation d'équivalents.

Partie III.

7. L'oubli de l'hypothèse de positivité dans les théorèmes de comparaison des séries conduit à de trop nombreuses erreurs. Cette question n'a été traitée complètement que par peu de candidats.

8. L'indication a été mal comprise, et mal utilisée. Peu de candidats traitent cette question correctement.

9. Cette question, facile, a été traitée correctement par une majorité de candidats.

10. Cette question, dont la technicité a été réduite par un découpage en sous-questions, permettait de faire le point sur les connaissances des candidats sur la convergence uniforme. On constate qu'il reste des progrès à faire sur la compréhension de ce mode de convergence.

11. Question assez classique, qui a donné lieu à des rédactions correctes et fructueuses.

12. et 13. Questions très peu abordées.

Partie IV.

Seules les questions 14, 15 et 16(a) ont été abordées de nombreuses fois, avec des succès variables.