Chapitre 4

Rapport sur les épreuves écrites

4.1 Première épreuve écrite

4.1.1 Énoncé

On trouvera l'énoncé de l'épreuve à l'adresse suivante : http://agrint.agreg.org/13-EP1.pdf

4.1.2 Généralités

Le thème

L'épreuve 1 de cette année proposait d'aborder plusieurs notions d'indice d'une courbe plane fermée (d'abord d'un point de vue algébrique puis en géométrie différentielle), visant essentiellement à mettre en place des stratégies de calcul des indices.

Ce qu'en ont fait les candidats

Cette année, de nombreuses copies sont soignées et montrent un réel souci de présentation et de rigueur, ce que les correcteurs ont apprécié ; toutefois, peu de copies dépassent la moitié du sujet (question 12). La plupart des candidats ont cherché à suivre le fil du problème, fournissant des réponses dans l'ordre des questions de l'énoncé, dans un souci de compréhension et d'approfondissement qui a aussi facilité la tâche des correcteurs. Quelques rares candidats ont grappillé des points sur les parties III et IV sans vraiment « entrer » dans l'esprit du sujet à ce stade.
Plus rarement, les justifications font partiellement ou complètement défaut. Rappelons que la démonstration est consubstantielle aux mathématiques et qu'elle en constitue l'une des activités essentielles. Elle doit s'appuyer en particulier sur des notations claires et connues de tous. Dans l'ensemble pourtant, on a pu remarquer une honnêteté intellectuelle qui se manifeste tout au long de la production du candidat ; c'est ainsi que les candidats n'hésitent pas à reconnaitre clairement qu'ils n'ont pas abouti dans la question, avant de passer à la suite.
Au plan des contenus mathématiques, les parties I et II (algébriques) nécessitaient une bonne familiarité avec les polynômes et fractions rationnelles, ce qui a gêné un certain nombre de candidats.

4.1.3 Partie I

Cette partie posait les bases d'un nouvel objet (l'indice d'une ligne polygonale fermée) et proposait de l'étudier sur quelques exemples.

Question 1

Cette question, généralement bien réussie, nécessitait de mettre en évidence le rôle de la parité de l'exposant k, ce que quelques-uns ont oublié. On rencontre sur quelques copies des notations curieuses comme $\dfrac{d}{0^+}$, ce qu'il convenait de définir de manière précise.

Question 2

On a rencontré beaucoup d'erreurs sur cette question pourtant simple. Certains invoquent la linéarité de la limite comme si la limite d'une somme était toujours la somme des limites sans percevoir qu'il s'agissait de limites potentiellement infinies. D'autres calculent $\lim\limits_{c+} F - \lim\limits_{c-} F$ sans se poser de question sur le sens de cette expression lorsque les deux limites valent $\pm\infty$.
Sur quelques copies la notion de pôle n'est pas très claire : si c est pôle de F de multiplicité k, certains pensent que la fraction F peut s'écrire sous la forme :

$$F = \frac{d}{(X-c)^k} + F_1$$

où d est un réel et F_1 est une fraction dont c n'est pas un pôle, comme si la partie polaire relative à c était toujours réduite à un seul élément simple.

Question 3

Cette question demandait d'abord de montrer que $I_c(P'/P)$ vaut 1 quand c est racine de P, mais on attendait aussi que le candidat mentionne explicitement que $I_c(F)$ est nul quand c n'est pas racine.

Question 4

Cette question a donné lieu à des rédactions longues et maladroites, notamment avec une recherche du pôle éventuel de la fraction rationnelle avant de montrer que ce pôle n'appartient pas à $]0,1[$.

Question 5

Beaucoup ont confondu le point d'intersection avec l'axe réel (noté t dans l'énoncé) avec le paramètre correspondant qui, lui, était dans $]0,1[$. Si les dessins sont en général corrects, les justifications sont souvent absentes et parfois laborieuses.

Question 6

En 6a, la parité a paru claire à tout le monde, mais la justification a été souvent un peu trop rapide : « si un segment traverse l'axe réel dans un sens, alors un autre doit traverser dans l'autre sens » est un argument compréhensible mais au fond insuffisant. Quelques-uns ont cependant eu l'idée de regarder le signe du produit : $\prod \dfrac{\mathrm{Im}(\alpha_{k+1})}{\mathrm{Im}(\alpha_k)}$.
La sous-question 6b fut assez bien traitée dans l'ensemble, même si le rôle de l'orientation de la ligne a parfois été ignoré, ou le facteur $\dfrac{1}{2}$ oublié.
En 6d, la plupart des candidats parviennent à formuler une conjecture valable ; ceux qui proposaient des valeurs 0 et 1 n'avaient pas tenu compte de l'orientation de la ligne. Les énoncés plus précis (mentionnant l'influence de la position de l'origine) ont été valorisés. Le problème n'abordait cependant pas vraiment la notion d'intérieur d'une line polygonale fermée, car il est difficile d'en donner une définition rigoureuse.

4.1.4 Partie II

Question 7

Cette question a souvent été mal traitée alors que la réponse $I_c(F) = 0$ suffisait ; certains candidats partent « à l'envers » et proposent comme condition suffisante la continuité de la fraction, ou encore la non-existence de racines sur l'intervalle $[a, b]$. Quant à ceux qui proposent une vraie condition nécessaire et suffisante, ils l'interprètent parfois de manière erronée, oubliant le cas où c est racine d'ordre pair.

Question 8

En 8a, les candidats ont rarement justifié le fait que les fonctions polynomiales associées à A et B gardent un signe constant ; le théorème des valeurs intermédiaires devait être cité y compris son hypothèse de continuité.
En 8b, une erreur fort répandue a consisté à affirmer que si le polynôme A s'annule alors la fonction polynomiale associée change de signe ; il convenait à nouveau de prendre en compte le cas des racines de multiplicité paire.

Question 9

Les sous-questions 9a et 9b n'ont presque jamais été bien traitées intégralement (en particulier le fait que $n \geqslant 2$), avec parfois de profondes incompréhensions (on croit parfois que n est égal au degré du polynôme A ou que les A_k sont les dérivées successives de A). Peu de candidats reconnaissent un calcul de pgcd avec une variante de l'algorithme d'Euclide ; la division euclidienne est cependant généralement reconnue. Certains candidats ignorent que le pgcd de A_k et A_{k+1} est celui des deux polynômes de départ A et A'.
En 9c, on a vu de fréquentes confusions entre inégalité large et inégalité stricte.

Question 12

Des erreurs assez fréquentes dans le calcul du produit matriciel, et parfois un résultat sans détailler le calcul ; d'autres candidats font le calcul pour une petite valeur de n et concluent en donnant le résultat général mais sans justification. Le calcul correct avec la formule donnant les coefficients du produit de matrices a finalement été assez rarement réussi.

Question 13

Une proportion non négligeable de candidats ont essayé d'utiliser des raisonnements du type « tout produit de matrices triangulaires inférieures est triangulaire inférieure », sans vraiment aboutir. On pouvait raisonner ainsi : comme ${}^tPM$ et P sont triangulaires inférieures, leur produit l'est ; par ailleurs, comme M est symétrique ${}^tPMP$ l'est. Ainsi, ${}^tPMP$ est à la fois symétrique et triangulaire inférieure, elle est donc diagonale.

Question 15

On a parfois vu l'erreur classique qui consiste à croire que M et ${}^tPMP$ sont semblables, ce qui revient à confondre congruence et similitude de matrices.

4.1.5 Parties III et IV

La fin du problème a rarement été abordée avec succès.

Question 16

Cette question fut peu traitée. Si le théorème de relèvement est généralement bien invoqué pour justifier l'existence de α_z, la continuité de $F(z)$ est rarement correctement justifiée. La plupart des candidats croient que $\exp(i\alpha_z(0)) = F(0) = \exp(i\theta)$ entraîne $\alpha_z(0) = \theta$. Les rares qui ont cherché à établir l'unicité écrivent le plus souvent :

$$\text{si } \exp(i\alpha_z(t)) = \exp(i\beta_z(t)) \text{ alors } \alpha_z(t) = \beta_z(t) + 2k\pi,$$

mais ne se rendent pas compte que l'entier k dépend *a priori* de t et pensent montrer que celui-ci est nul simplement en évaluant en 0. Il fallait utiliser la continuité et le fait que l'image d'un intervalle par une application continue est un intervalle.

Question 20

Cette question a été assez bien traitée par les très rares candidats qui l'ont abordée, même si la périodicité de la fonction τ n'a pas toujours été mise en évidence.

4.2 Seconde épreuve écrite

4.2.1 Énoncé

On trouvera l'énoncé de l'épreuve à l'adresse suivante : http://agrint.agreg.org/13-EP2.pdf

4.2.2 Généralités

Le thème

Dans ce problème, on a souhaité s'intéresser à la surjectivité de l'application

$$\Phi : \begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathcal{A} \\ a & \longmapsto & a \exp a \end{array},$$

où $(\mathcal{A}, \|.\|)$ représente une $\mathbf{C}-$algèbre de Banach. Pour simplifier, on est resté raisonnablement au stade de la dimension finie.
Dans la partie **I**, on montre l'existence d'une norme d'algèbre dans les algèbres de dimension finie puis on établit l'identité dite d'Abel.
Dans la partie **II**, On construit une réciproque locale de $a \longmapsto a \exp a$ autour de l'origine dans $\mathcal{A}$.
Dans la partie **III**, on traite la cas $\mathcal{A} = \mathbf{C}$.
Dans la partie **IV**, on traite la cas $\mathcal{A} = M_n(\mathbf{C})$.
Signalons que l'ensemble des fonctions continues sur le disque-unité fermé, somme d'une série entière de rayon de convergence $\geqslant 1$, muni de la norme infinie, constitue une $\mathbf{C}-$algèbre de Banach sur laquelle $a \longmapsto a \exp a$ n'est pas surjective.

Les ingrédients pour ce problème faisaient intervenir la topologie, les suites et séries de fonctions, série entière et série double.